Методика подготовки к решению задач на «Принцип крайнего»

С чего начать?

Демонстрационные задачи.

1. На прямой отмечено 100 точек. Может ли быть так, что каждая их них является серединой отрезка, концы которого тоже являются точками этого множества точек?

2. На каждой планете находится ровно один астроном, и он наблюдает ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Доказать, что есть две планеты, астрономы которых наблюдают друг друга.

Теперь можно сформулировать сам принцип крайнего:

Среди объектов, фигурирующих в условии задачи, выбрать объект с «крайним» по отношению к другим объектам свойством – самый левый, самый нижний, самый маленький или самый большой и т.д..

Основная цель: научиться видеть, что полезно использовать принцип крайнего.

Главный признак: в задаче фигурируют объекты, у которых есть одинаковое для всех свойство:

в задаче 1 любая точка является серединой отрезка с концами в тех же точках;

в задаче 2 с каждой планеты наблюдается ближайшая.

Развитие виденья принципа крайнего в задачах.

3. На плоскости отмечены 200 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, внутри которого нет ни одной из отмеченных точек.

Обсуждение. Все точки и получающиеся из них треугольники равноправны. Выберем треугольник наименьшей площади. Внутри него уже не может лежать никакая точка, поскольку иначе найдётся треугольник меньшей площади.

4. В каждой вершине десятиугольника написано число, равное полусумме двух своих соседей. Доказать, что все числа равны.

Обсуждение. Общее свойство всех чисел – каждое равно полусумме своих соседей. Доказать надо равенство. Если это не так, то выбираем самое большое (годится и самое маленькое). Пусть это x, а y и z – его соседи. Тогда $x = \frac{y+z}{2}$ и в то же время $x \geq y$ и $x \geq z$. Если хотя бы в одном из этих двух случаев неравенство будет строгим, то $x > \frac{y+z}{2}$ в противоречии с условием. Значит, $x = y = z$. Тогда следующее число, соседнее с числом z, тоже равно x. Дальнейшее очевидно.

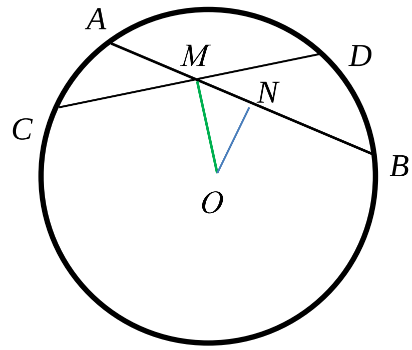
5. Доказать, что в любом выпуклом пятиугольнике можно найти три диагонали, из которых как из отрезков можно построить треугольник.

Обсуждение. Каково условие, что из трёх отрезков можно построить треугольник? Сумма двух любых должна быть больше третьего. В этом условии условие все три отрезка опять фигурируют одинаково. Но уже в школе часто его формулируют с позиции принципа крайнего: наибольший отрезок меньше суммы двух других. Это подсказывает решение задачи: выберем в пятиугольнике наибольшую по длине диагональ. Диагонали, выходящие из её концов, и дают нужный комплект диагоналей.

6. В круге провели несколько хорд так, что каждая проходит через середину какой-либо другой из проведенных хорд. Докажите, что все эти хорды являются диаметрами круга.

Обсуждение. Полезно предложить учащимся попутаться построить последовательность хорд, удовлетворяющих условию, но не проходящим через центр. Они убеждаются, что каждая следующая хорда меньше по длине предыдущей. Это приводит к идее взять хорду наименьшей длины.

Решение. Предположим, что это не так, т.е. имеется хорда, не являющаяся диаметром круга, а, значит, её длина меньше, чем длина диаметра. Среди всех хорд, не являющихся диаметром, выберем хорду наименьшей длины. Пусть это хорда AB (см. рисунок).



По условию она проходит через середину некоторой другой хорды. Обозначим её CD. Пусть M – точка пересечения этих хорд, а O – центр окружности. Тогда OM – перпендикуляр к CD.

Опустим перпендикуляр ON на AB. В ΔONM отрезок ON – катет, а OM – гипотенуза, которая обязательно длиннее катета. Следовательно, хорда CD отстоит от центра окружности дальше, чем хорда AB, а, значит, она короче хорды , что противоречит выбору. Следовательно в окружности есть только хорды, являющиеся диаметрами.

7. Решить систему уравнений

$$x_1^2 = x_2 + x_3;\ \ x_2^2 = x_3 + x_4;\ \ x_3^2 = x_4 + x_5;\ \ x_4^2 = x_5 + x_1;\ \ x_5^2 = x_1 + x_2.$$

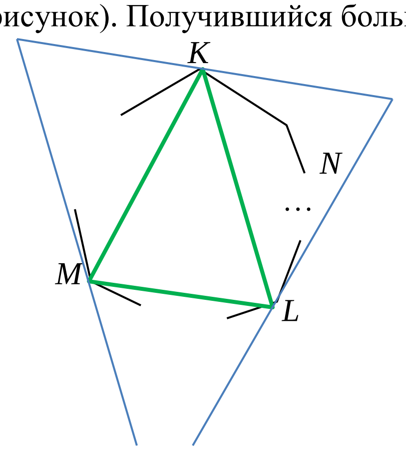
Решение. В том наборе значений переменных, которые дают решение, выберем наибольшее. Поскольку при перенумерации переменных по циклу система остаётся той же самой, можно без ограничения общности считать, что это значение имеет неизвестное x_1 (если получатся значения переменных, отличающиеся от наибольшего, то другие решения системы получаются циклической перестановкой).

Вычтем из первого равенства последнее: $x_1^2 - x_5^2 = x_3 - x_1$. Заметим, что $x_1^2 - x_5^2 = (x_1 - x_5)(x_1 + x_5) = (x_1 - x_5)\,x_4^2 \geq 0$, так как $x_1 \geq x_5$ и $x_5 + x_1 = x_4^2$. В то же время $x_3 - x_1 \leq 0$, так что $x_3 - x_1 = 0$. Следовательно, x_3 – тоже имеет максимальное значение. Вычтя из третьего равенства четвёртое, аналогично получаем, что $x_1 = x_4$. Вычтя из третьего равенства второе, получаем, что $x_3 = x_5$, а, вычтя из первого равенства второе, получаем, что $x_1 = x_2$. Следовательно, все неизвестные имеют одно значение. Тогда первое уравнение превращается в $x_1^2 = x_1$, откуда $x_1 = 0$ или $x_1 = 2$. Ясно, что оба набора значений $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ и $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$ годятся.

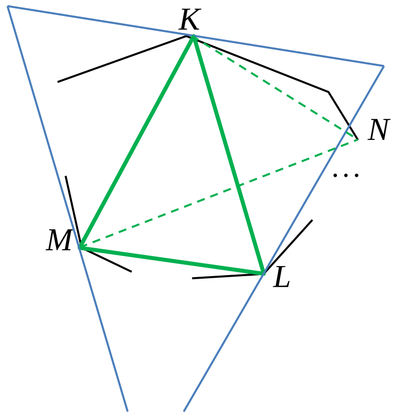
Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ или $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$.

8. Дан выпуклый многоугольник, в который нельзя поместить треугольник площади 1. Доказать, что этот многоугольник можно поместить в треугольник площади 4.

Решение. Рассмотрим треугольники с вершинами в вершинах многоугольника. Их конечное число, поэтому среди них можно выбрать треугольник наибольшей площади. Пусть его вершины K, L, M. Через каждую вершину проведём прямую, параллельную противоположной стороне треугольника (см. рисунок). Получившийся большой треугольник имеет площадь не больше, чем 4.



Покажем, что исходный многоугольник полностью лежит в большом треугольнике. Предположим, например, что вершина N вышла за пределы большого треугольника. Тогда рассмотрим ΔKNM. Его высота, опущенная из вершины N на сторону KM больше высоты ΔKLM, опущенной их вершины L, и, значит, площадь ΔKNM больше площади ΔKLM, что противоречит выбору ΔKLM.



Дополнительные задачи

1. Решить систему уравнений

$$x_1^2 = x_2^3 + x_3^3;\ \ x_2^2 = x_3^3 + x_4^3;\ \ x_3^2 = x_4^3 + x_5^3;\ \ x_4^2 = x_5^3 + x_1^3;\ \ x_5^2 = x_1^3 + x_2^3.$$

2. Дан выпуклый многоугольник площади S. Докажете, что его можно поместить в прямоугольник площади $2S$.