Методика подготовки к решению задач на «Принцип Дирихле»

С чего начать?

Демонстрационная задача.

1. Доказать, что:

а) если в четырех клетках сидит 5 кроликов, то в одной клетке сидят по крайней мере 2 кролика;

б) если в двух клетках сидит 5 кроликов, то в одной клетке сидят по крайней мере 3 кролика.

в) в компании из 10 человек найдутся двое, родившиеся в один день недели;

г) в классе из 25 человек найдутся трое, родившиеся в один месяц.

Теперь можно сформулировать сам принцип Дирихле:

Если $kn + 1$ предметов разложены в ящиков, то, по крайней мере, в одном из ящиков не менее, чем $k + 1$ предметов.

Проводится обоснование, которое вполне очевидно.

Основная цель: научиться видеть, что полезно использовать принцип Дирихле.

Главный признак: в задаче не требуется находить конкретные объекты, для которых выполняется требуемое свойство:

в пунктах а) и б) не требуется указать, какие именно кролики и в какой клетке окажутся;

в пункте в) не требуется указать, кто именно и в какой день имеют совпадение;

в пункте г) не требуется указать ни именинников, ни общий для них месяц

Развитие виденья принципа Дирихле в задачах.

Ящики определяются тем общим свойством, которое должны иметь искомые объекты.

2. Плоскость произвольным образом раскрашена в два цвета. Доказать, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 м друг от друга.

Обсуждение. Общее свойство всех точек – иметь цвет. Их два, т.е. два ящика, например, чёрный и белый. Каждая точка попадает в ящик своего цвета. Сколько надо взять точек, чтобы применить принцип Дирихле? 3. Как их расположить на плоскости? Чтобы попарные расстояния были 1 м, т.е. в вершинах правильного треугольника. Дальнейшее очевидно.

3. Доказать, что:

а) среди любых одиннадцати целых чисел, найдутся два, разность которых делится на 10.

б) среди любых трех целых чисел, найдутся два, разность которых делится на 2.

в) среди любых $n + 1$ целых чисел, найдутся два, разность которых делится на n.

Обсуждение. Здесь мы начинаем учить нахождению числа ящиков по параметрам в условии задачи.

а) Ящиков нужно 10, потому что $kn + 1 = 11$, а $k + 1 = 2$. Они должны быть связаны с делимостью на 10. Делиться на 10 – значит оканчиваться на 0. Значит, одинаковые последние цифры у уменьшаемого и вычитаемого. Ящик – последняя цифра, их как раз 10.

б) Ящики - чётность и нечётность

в) Ящик – остаток при делении на n.

4. Доказать, что для любого натурального числа n существует число, записываемое только единицами и нулями и делящееся на n.

Обсуждение. Решение задачи опирается на задачу 3 в). Рассмотрим последовательность чисел 1, 11, 111, … . Если среди них есть делящееся на n, то утверждение получено, если нет, то надо взять $n + 1$ чисел и применить задачу 3 в).

5. Доказать, что среди 82 кубиков, каждый из которых выкрашен в определенный цвет, всегда можно выбрать 10 кубиков так, что либо все они выкрашены в разные цвета, либо все они одного цвета.

Обсуждение. Ясно, что общим признаком здесь снова выступает цвет. Чтобы обеспечить применение принципа Дирихле, надо чтобы использовалось не более 9 цветов. Но если использовалось больше 9, то 10 разноцветных кубиков всегда найдутся.

6. В квадрат со стороной 1 бросили 51 точку. Доказать, что найдется круг радиуса 1/7, содержащий, по крайней мере, три из этих точек.

Обсуждение. Считаем нужное число ящиков: что $kn + 1 = 51$, а $k + 1 = 3$. Отсюда $n = 25$. Как разбить квадрат (ведь точки в нём!) на 25 ящиков? Естественно на 25 квадратиков со стороной 1/5. В один из таких квадратиков три тучки попадут. Окружность, описанная около этого квадратика, имеет радиус меньший 1/7.

7. Какое наибольшее число королей можно расставить на шахматной доске 8 × 8 так, чтобы они не били друг друга.

Обсуждение. Условие, что короли не бьют друг друга – они не находятся в одном квадрате 2 × 2. Разбиваем доску на 16 таких квадратов. По принципу Дирихле 17 королей быть не может, а 16 легко размещаются.

Дополнительные

1. Каждый из восьми мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые два из них встречались около киоска. Докажите, что в некоторый момент там встретились одновременно четверо мальчиков.
2. В квадрате 10×10 каждая клетка закрашена в один из 9 цветов. Разрешается любую строку или любой столбец перекрасить в один цвет, если в ней или в нем есть две клетки этого цвета. Доказать, что за несколько таких перекрашиваний можно добиться того, что весь квадрат будет одного цвета.
3. У бабушки 8 внучат разного возраста, но не старше 15 лет. Доказать, что существует три пары, в которых старший внук старше младшего на одно и то же число лет.
4. Доказать, что среди 65 целых чисел всегда найдутся 9 чисел, сумма которых делится на 9.