ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 29 № 4 2023

УДК 512.542+519.175.1

ГРАФ С ЛОКАЛЬНО ПРОЕКТИВНОЙ ТРАНЗИТИВНОЙ НА ВЕРШИНАХ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ $\mathrm{Aut}(Fi_{22})$, ИМЕЮЩЕЙ НЕТРИВИАЛЬНЫЙ СТАБИЛИЗАТОР ШАРА РАДИУСА 2[1]

В. И. Трофимов

Ранее в качестве подтверждения реализуемости одной из возможностей для строения стабилизаторов вершин графов с проективными подорбитами автором было анонсировано существование связного графа Γ, допускающего изоморфную $\mathrm{Aut}(Fi_{22})$ группу автоморфизмов G со следующими свойствами. Во-первых, группа G действует транзитивно на множестве вершин Γ, но интранзитивно на множестве 3-дуг Γ. Во-вторых, стабилизатор в G вершины графа Γ индуцирует на окрестности этой вершины группу $PSL_3(3)$ в естественном дважды транзитивном представлении. В-третьих, поэлементный стабилизатор в G шара радиуса 2 графа Γ нееединичен. В настоящей работе дается построение такого графа Γ, причем со свойством $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Ключевые слова: граф, транзитивная локально проективная группа автоморфизмов, группа Фишера Fi_{22}.

V. I. Trofimov. A graph with a locally projective group of automorphisms Aut(Fi$_{22}$) that is transitive on vertices and has a nontrivial stabilizer of a ball of radius 2.

Earlier, to confirm that one of the possibilities for the structure of vertex stabilizers of graphs with projective suborbits is realizable, the author announced the existence of a connected graph Γ admitting a group of automorphisms G that is isomorphic to $\mathrm{Aut}(\mathrm{Fi}_{22})$ and has the following properties. First, the group G acts transitively on the set of vertices of Γ, but intransitively on the set of 3-arcs of Γ. Second, the stabilizer in G of a vertex of Γ induces on the neighborhood of this vertex a group $PSL_3(3)$ in its natural doubly transitive action. Third, the pointwise stabilizer in G of a ball of radius 2 in Γ is nontrivial. In this paper, we construct such a graph Γ with $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Keywords: graph, transitive locally projective group of automorphisms, Fischer group Fi_{22}.

MSC: 05E18, 20B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-4-274-278

1. Введение

Под графом в работе понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер. Если Γ — граф, то $V(\Gamma)$ — множество его вершин, $E(\Gamma)$ — множество его ребер, $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ — его группа автоморфизмов (рассматриваемая как группа подстановок на $V(\Gamma)$), $d_\Gamma(.,.)$ — обычное расстояние между вершинами графа Γ. Для $x \in V(\Gamma)$ полагаем $\Gamma(x) = \{y \in V(\Gamma) : \{x, y\} \in E(\Gamma)\}$ — окрестность вершины x. Если, кроме того, $A \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$, то A_x — стабилизатор в A вершины x, $A_x^{[i]}$ для $i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ — поэлементный стабилизатор в A множества вершин графа Γ, удаленных от x на расстояние $\leq i$ (таким образом, $A_x = A_x^{[0]}$), $A_x^{\Gamma(x)}$ — индуцированная A_x на $\Gamma(x)$ группа подстановок. Для $i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ последовательность $(x_0, x_1, \ldots, x_i)$ вершин графа Γ называется i-дугой графа Γ, если $\{x_j, x_{j+1}\} \in E(\Gamma)$ для всех $0 \leq j < i$ и $x_{j-1} \neq x_{j+1}$ для всех $0 < j < i$.

В серии работ автора (см. [1] и приведенные там ссылки) было завершено перечисление всех возможностей для строения стабилизатора вершины конечного связного графа в транзитивной на вершинах группе автоморфизмов в случае, когда этот стабилизатор вершины

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-935).

индуцирует на ее окрестности группу, содержащую в качестве нормальной подгруппы проективную специальную линейную группу в естественном дважды транзитивном представлении. (Этот результат завершил нахождение стабилизаторов вершин связных конечных графов в действующих транзитивно на множестве 2-дуг группах автоморфизмов.) Для каждой из перечисленных возможностей были указаны примеры (граф и группа), реализующие эту возможность (см. [1]; отметим, что из существования одного примера, реализующего некоторую возможность, следует существование бесконечного набора примеров, реализующих эту же возможность, см. там же). За одним исключением эти примеры были либо ранее известны, либо детально описываются в [1]. Этим единственным исключением является анонсированный в [2, ч. I] (а по существу и в [3]; см. также [1, пример 5.5][2]) пример конечного связного графа Γ и транзитивной на вершинах группы его автоморфизмов G, для которых имеет место случай 2) теоремы 1 из [2, ч. I], т. е. с учетом этой теоремы таких, что для $x \in V(\Gamma)$ группа $G_x^{\Gamma(x)}$ есть $SL_3(3) \cong PSL_3(3)$ в естественном дважды транзитивном представлении и группа $G_x^{[2]}$ неединична, а группа G действует интранзитивно на множестве 3-дуг графа Γ. Но согласно [2, ч. II] и [4, Приложение] условие интранзитивности действия G на множестве 3-дуг графа Γ является здесь следствием остальных условий. В [2, ч. I] (и в [1], а по существу и в [3]) при этом утверждалось, что в качестве G может быть взята группа, изоморфная группе $\mathrm{Aut}(Fi_{22})$ автоморфизмов спорадической простой группы Фишера Fi_{22}. Таким образом, доказательство существования анонсированного примера — это в точности доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Существует связный конечный граф Γ, допускающий изоморфную $\mathrm{Aut}(Fi_{22})$ транзитивную на вершинах группу автоморфизмов такую, что, во-первых, стабилизатор в ней вершины графа Γ индуцирует на окрестности этой вершины группу $PSL_3(3)$ в естественном дважды транзитивном представлении (степени 13) и, во-вторых, поэлементный стабилизатор в ней шара радиуса 2 графа Γ неединичен.*

2. Доказательство теоремы

Приводимое ниже доказательство теоремы несколько отличается от первоначального (неопубликованного). Используемые при доказательстве факты, касающиеся групп Fi_{22} и $\mathrm{Aut}(Fi_{22})$, можно найти в [5–8] (в первоначальном доказательстве использовались лишь [5–7]), хотя многие из этих результатов восходят к [9].

Положим $G = \mathrm{Aut}(Fi_{22})$ и $G' = \mathrm{Inn}(Fi_{22}) \cong Fi_{22}$ — подгруппа индекса 2 группы G.

Напомним некоторые свойства группы Fi_{22} (формулируя их для изоморфной ей группы G').

В группе G' элементы порядка 3 образуют 4 класса сопряженных элементов: $3A, 3B, 3C, 3D$ (в обозначениях из [5], см. также [6]), причем все эти классы вещественны и G-инвариантны (что следует, например, из попарной неизоморфности централизаторов в группе G' представителей этих классов, см. [6]).

В группе G' имеется один класс сопряженных элементарных абелевых подгрупп порядка 3^5, причем эти подгруппы самоцентрализуемы в G', а их нормализаторы в G' имеют вид $3^5 : SO_5(3)$ и индуцируют на них при сопряжении структуру естественного $\mathbf{F}_3 SO_5(3)$-модуля (см. [6]).

В группе G' имеется два класса $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных $O_7(3)$ (и каждая подгруппа группы G', изоморфная $O_7(3)$, принадлежит одному из этих классов). Эти классы переставляются при сопряжении элементом из $G \setminus G'$. (См. [5] или [6].)

Пусть H — конечная группа, определяемая следующим образом: H есть расщепляемое расширение группы $O_3(H)$ экспоненты 3 посредством группы $SL_3(3) \cong PSL_3(3) = L_3(3)$,

[2] В [1] в утверждении (b) разд. 5 вместо $\mathbf{F}_2$ должно быть $\mathbf{F}_3$; кроме того, на с. 317 в 5-й строке снизу вместо [20, II] должно быть [20, I].

$[O_3(H), O_3(H)] = Z(O_3(H))$, $O_3(H)/Z(O_3(H))$ и $Z(O_3(H))$ — элементарные абелевы группы порядка 3^3, причем группы $O_3(H)/Z(O_3(H))$ и $Z(O_3(H))$, рассматриваемые как $\mathbf{F}_3SL_3(3)$-модули, есть естественный $\mathbf{F}_3SL_3(3)$-модуль и дуальный к нему $\mathbf{F}_3SL_3(3)$-модуль. (В обозначениях из [5] группа H имеет вид $3^{3+3} : L_3(3)$.)

В группе $O_7(3)$ имеется один класс сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных H (и каждая подгруппа группы $O_7(3)$, изоморфная H, принадлежит этому классу). Изоморфные H подгруппы группы $O_7(3)$ — это стабилизаторы в группе $O_7(3)$ (рассматриваемой как коммутант группы $SO_7(3)$) вполне изотропных 3-мерных подпространств естественного $\mathbf{F}_3SO_7(3)$-модуля. (См. [5].)

Пусть S — изоморфная H подгруппа группы G'. Если $S \lneqq T \lneqq G'$ (а S не является максимальной подгруппой группы G', см. [5] или [6]), то $T \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. (Действительно, см. [6], S содержит силовскую 3-подгруппу группы G', а максимальными подгруппами группы G', содержащими ее силовскую 3-подгруппу, являются подгруппы вида либо $3_+^{1+6} : 2^{3+4} : 3^2 : 2$ (которые, очевидно, не содержат S), либо $O_7(3)$.) В частности, $S = N_{G'}(S) = N_{G'}(Z(O_3(S))$, и число сопряженных с S в группе G' подгрупп равно $|G' : S|$. Далее, поскольку в T содержится $|T : S|$ сопряженных с S в группе G' подгрупп (см. выше) и в G' содержится $|G' : T|$ сопряженных с T в группе G' подгрупп, то S не может содержаться в двух различных подгруппах из одного и того же класса $\mathcal{O}_1$ или $\mathcal{O}_2$. Кроме того, S не может содержаться в $T_1 \cap T_2$ для $T_1 \in \mathcal{O}_1$ и $T_2 \in \mathcal{O}_2$, поскольку из сопряженности T_1 и T_2 в группе G и из сопряженности в группе T_2 всех ее изоморфных S подгрупп тогда следовало бы $N_G(S) \not\leq G'$, что противоречит [6; 7] (согласно [6; 7] в G отсутствуют отличные от G' максимальные подгруппы порядка, делящегося на $3^9 \cdot 13$). Итак, в G' имеются два класса $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ сопряженных подгрупп, изоморфных H. Эти классы содержат по $2^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ подгрупп и переставляются при сопряжении элементом из $G \setminus G'$. Не теряя общности, будем считать, что каждая подгруппа из класса $\mathcal{V}_1$ содержится в (единственной) подгруппе из класса $\mathcal{O}_1$ (и не содержится в подгруппах из класса $\mathcal{O}_2$), а каждая подгруппа из класса $\mathcal{V}_2$ содержится в (единственной) подгруппе из класса $\mathcal{O}_2$ (и не содержится в подгруппах из класса $\mathcal{O}_1$). Заметим, что для произвольных $S_1 \in \mathcal{V}_1$ и $S_2 \in \mathcal{V}_2$ имеем $\langle S_1, S_2 \rangle = G'$ (поскольку, см. выше, в противном случае S_1 и S_2 содержались бы в одной подгруппе из $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, что невозможно). Как следствие для произвольных $S_1 \in \mathcal{V}_1$ и $S_2 \in \mathcal{V}_2$ граф с множеством вершин $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ и множеством ребер $\{\{gS_1g^{-1}, gS_2g^{-1}\} : g \in G'\}$ связен (поскольку допускает в качестве группы автоморфизмов действующую сопряжением группу G', а стабилизатор в этой группе автоморфизмов связной компоненты графа, содержащей S_1 и S_2, в силу $\langle S_1, S_2 \rangle = G'$ совпадает с ней).

Для доказательства теоремы, принимая во внимание [2, ч. I, теорема 1] и [4, Приложение], достаточно доказать существование таких $S_1 \in \mathcal{V}_1$ и $S_2 \in \mathcal{V}_2$, что $|S_1 : S_1 \cap S_2| = 13$ (и, следовательно, $S_1 \cap S_2$ имеет вид $3^{3+3} : 3^2GL_2(3)$, а $O_3(S_1)O_3(S_2) \leq S_1 \cap S_2$), причем $aS_1a^{-1} = S_2$ и $aS_2a^{-1} = S_1$ для некоторого элемента $a \in G$. Действительно, обозначая через Γ_{S_1,S_2} граф с множеством вершин $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ (число вершин графа Γ_{S_1,S_2}, таким образом, равно 31539200) и множеством ребер $\{\{gS_1g^{-1}, gS_2g^{-1}\} : g \in G'\}$ и обозначая через ψ (точное) действие сопряжением группы $G = \mathrm{Aut}(Fi_{22})$ на $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, получаем, что Γ_{S_1,S_2} — связный граф (см. выше), допускающий транзитивную на множестве вершин группу автоморфизмов $\psi(G) \cong \mathrm{Aut}(Fi_{22})$, причем стабилизатор вершины S_1 графа Γ_{S_1,S_2} в группе $\psi(G)$ есть $\psi(S_1) \cong S_1$ (поскольку S_1 самонормализуема в группе G', а следовательно, и в группе G, см. выше) и индуцирует на множестве $\Gamma_{S_1,S_2}(S_1)$ группу $PSL_3(3)$ в естественном дважды транзитивном представлении (степени 13). Кроме того, $\psi(G)_{S_1}^{[1]} = \cap_{h \in \psi(S_1)} h(\psi(S_1) \cap \psi(S_2))h^{-1} = \psi(O_3(S_1))$ и $\psi(G)_{S_2}^{[1]} = \psi(O_3(S_2))$. При этом $Z(O_3(S_1)) \leq O_3(S_2)$, поскольку в противном случае, учитывая, что каждый неединичный элемент из $Z(O_3(S_1))$ есть коммутатор некоторых элементов из $O_3(S_1)$, имеем $|O_3(S_1)O_3(S_2)/O_3(S_2)| \geq 3^3$, а это ввиду $O_3(S_1)O_3(S_2) \leq O_3(S_1 \cap S_2)$ и $|O_3(S_2)| = 3^6$ противоречит $|O_3(S_1 \cap S_2)| = 3^8$. Таким образом,

$$\psi(G)_{S_1}^{[2]} = \cap_{h \in \psi(S_1)} h(\psi(G)_{S_2}^{[1]})h^{-1} \geq \psi(Z(O_3(S_1))) \neq 1,$$

что с учетом строения группы S_1 дает $\psi(G)^{[1]}_{S_1}/\psi(G)^{[2]}_{S_1} = O_3(\psi(G)_{S_1})/Z(O_3(\psi(G)_{S_1}))$, $\psi(G)^{[2]}_{S_1} = Z(O_3(\psi(G)_{S_1}))$, $\psi(G)^{[3]}_{S_1} = 1$. Из [4, Приложение] (согласно этой ссылке исключается возможность транзитивного действия группы $\psi(G)$ на множестве 3-дуг графа Γ_{S_1,S_2}) и [2, ч. I, теорема 1] теперь следует, что граф Γ_{S_1,S_2} и группа его автоморфизмов $\psi(G) \cong \mathrm{Aut}(Fi_{22})$ обладают требуемыми свойствами.

Покажем, что существование требуемых для завершения доказательства теоремы S_1 и S_2 легко следует из [8, разд. 5.1] (где следует исправить очевидные опечатки: в ряде мест, например, на с. 55, строки 15, 18, 22, авторы пишут $U^{(i)}_\pi$ вместо $Z(U^{(i)}_\pi)$). Пусть X — некоторая $3B$-чистая элементарная абелева 3-подгруппа порядка 3^2, содержащаяся в элементарной абелевой подгруппе U порядка 3^5 группы G' (см. [8, лемма 22 (3)]). Тогда X содержится в такой $3B$-чистой элементарной абелевой подгруппе Y порядка 3^3 группы G', что $N_{G'}(Y) \in \mathcal{V}_1$ (см. [8, лемма 22 (3)]). При этом $N_{G'}(X)$ имеет вид $3^{3+3} : 3^2GL_2(3)$ и содержится в $N_{G'}(Y)$ [8, лемма 22 (3)]. Пусть $a_1 \in G \setminus G'$. Тогда $a_1Xa_1^{-1}$ — $3B$-чистая элементарная абелева подгруппа порядка 3^2, содержащаяся в элементарной абелевой подгруппе $a_1Ua_1^{-1}$ порядка 3^5 группы G', что в силу сопряженности в группе G' всех таких подгрупп порядка 3^2 (см. [8, лемма 22 (3)]) влечет существование $a_2 \in G'$ со свойством $a_2a_1Xa_1^{-1}a_2^{-1} = X$. Полагая $S_1 = N_{G'}(Y)$, $a = a_2a_1$ и $S_2 = aS_1a^{-1}$, получаем окончательно $S_1 \in \mathcal{V}_1$, $S_2 \in \mathcal{V}_2$, $N_{G'}(X)$ — подгруппа индекса 13 как в S_1, так и в S_2 (и, следовательно, $N_{G'}(X) = S_1 \cap S_2$), $aS_2a^{-1} = S_1$ (поскольку $a^2 \in N_{G'}(X) \leq S_1 \cap S_2$).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что для построенного графа Γ_{S_1,S_2} справедливо равенство $\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2}) = \psi(\mathrm{Aut}(Fi_{22}))$. Действительно, в силу транзитивности группы $\psi(\mathrm{Aut}(Fi_{22}))$ имеем $|\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})\colon \psi(\mathrm{Aut}(Fi_{22}))| = |\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})_{S_1}\colon \psi(\mathrm{Aut}(Fi_{22}))_{S_1}|$. При этом из $\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})^{[2]}_{S_1} \neq 1$ согласно [10, 2.3] следует, что у примитивной (даже дважды транзитивной) группы подстановок $\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})^{\Gamma_{S_1,S_2}(S_1)}_{S_1}$ стабилизатор точки является локальной подгруппой. (Действительно, для $S_3 \in \Gamma_{S_1,S_2}(S_2) \setminus \{S_1\}$ на основании транзитивности действия группы $\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})$ на множестве 2-дуг графа Γ_{S_1,S_2} и [10, 2.3] заключаем, что $(\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})^{[1]}_{S_2} \cap \mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})^{[1]}_{S_3})^{\Gamma_{S_1,S_2}(S_1)}$ — неединичная p-группа для некоторого простого числа p, что с учетом субнормальности $\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})^{[1]}_{S_2} \cap \mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})^{[1]}_{S_3}$ в $\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})_{S_1} \cap \mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})_{S_2}$ влечет требуемое.) Но этим свойством не обладают содержащие собственным образом группу $\psi(\mathrm{Aut}(Fi_{22}))^{\Gamma_{S_1,S_2}(S_1)}_{S_1}$ (подстановочно изоморфную группе $PSL_3(3)$ в естественном дважды транзитивном представлении) подгруппы симметрической группы на множестве $\Gamma_{S_1,S_2}(S_1)$. На основании этого заключаем, что $\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})^{\Gamma_{S_1,S_2}(S_1)}_{S_1} = \psi(\mathrm{Aut}(Fi_{22}))^{\Gamma_{S_1,S_2}(S_1)}_{S_1}$ — группа, подстановочно изоморфная группе $PSL_3(3)$ в естественном дважды транзитивном представлении. Но тогда с учетом $\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})^{[2]}_{S_1} \neq 1$ из [2, ч. I, теорема 1], [2, ч. II, теорема] и [4, Приложение] следует, что $|\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2})_{S_1}| = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 13 = |\psi(\mathrm{Aut}(Fi_{22}))_{S_1}|$. Таким образом, $\mathrm{Aut}(\Gamma_{S_1,S_2}) = \psi(\mathrm{Aut}(Fi_{22}))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Trofimov V.I.** Vertex stabilizers of locally projective groups of automorphisms of graphs: a summary // Groups, Combinatorics and Geometry, Durham 2001. NJ etc.: World Sci. Publ., 2003. P. 313–326.
2. **Трофимов В.И.** Графы с проективными подорбитами. Случаи малых характеристик. I, II // Изв. РАН. Сер. математическая. 1994. Т. 58, № 5. С. 124–171; 1994. Т. 58, № 6. С. 137–156.
3. **Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов с проективными подорбитами // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315, № 3. С. 544–546.
4. **Трофимов В.И.** Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. I // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 6. С. 159–222.
5. **Conway J.H. [et al.]** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1995. 252 p.
6. **Wilson R.A.** On maximal subgroups of the Fischer group Fi_{22} // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1984. Vol. 95. P. 197–222. doi: 10.1017/S0305004100061491

7. **Kleidman P.B., Wilson R.A.** The maximal subgroups of Fi_{22} // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1987. Vol. 102. P. 17–23. doi: 10.1017/S0305004100067001
8. **Kitazume M., Yoshiara S.** The radical subgroups of the Fischer simple groups // J. Algebra. 2002. Vol. 255. P. 22–58. doi: 10.1016/S0021-8693(02)00119-9
9. **Fischer B.** Finite groups generated by 3-transpositions. WMI Preprints. Coventry (UK): University of Warwick, 1969. (University of Warwick lecture notes).
10. **Gardiner A.** Arc transitivity in graphs // Quart. J. Math. Oxford (2). 1973. Vol. 24. P. 399–407. doi: 10.1093/qmath/24.1.399

Поступила 26.09.2023
После доработки 6.10.2023
Принята к публикации 9.10.2023

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
профессор, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Trofimov V.I. Vertex stabilizers of locally projective groups of automorphisms of graphs: a summary. In: *Groups, Combinatorics and Geometry, Durham 2001*, NJ etc.: World Sci. Publ., 2003. P. 313–326.
2. Trofimov V.I. Graphs with projective suborbits. Cases of small characteristics. I, II. *Russian Academy of Sciences Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 45, no. 2, pp. 353–398. doi: 10.1070/IM1995v045n02ABEH001645; 1995, vol. 45, no 3, pp. 559–576. doi: 10.1070/IM1995v045n03ABEH001672
3. Trofimov V.I. Vertex stabilizers of graphs with projective suborbits. *Dokl. Math.*, 1991, vol. 42, no 3, pp. 825–828.
4. Trofimov V.I. Graphs with projective suborbits. Exceptional cases of characteristic 2, I. *Russian Academy of Sciences Izvestiya Mathematics*, 1998, vol. 62, no. 6, pp. 1221–1279. doi: 10.1070/IM1998v062n06ABEH000224
5. Conway J.H. [et al.]. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1995. 252 p.
6. Wilson R.A. On maximal subgroups of the Fischer group Fi_{22}. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1984, vol. 95, pp. 197–222. doi: 10.1017/S0305004100061491
7. Kleidman P.B., Wilson R.A. The maximal subgroups of Fi_{22}. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1987, vol. 102, pp. 17–23. doi: 10.1017/S0305004100067001
8. Kitazume M., Yoshiara S. The radical subgroups of the Fischer simple groups. *J. Algebra*, 2002, vol. 255, pp. 22–58. doi: 10.1016/S0021-8693(02)00119-9
9. Fischer B. *Finite groups generated by 3-transpositions.* WMI Preprints, Coventry (UK): University of Warwick, 1969.
10. Gardiner A. Arc transitivity in graphs. *Quart. J. Math. Oxford* (2), 1973, vol. 24, pp. 399–407. doi: 10.1093/qmath/24.1.399

Received September 26, 2023
Revised October 6, 2023
Accepted October 9, 2023

Funding Agency: This work was performed as a part of the research conducted in the Ural Mathematical Center and supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2023-935).

Vladimir Ivanovich Trofimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: trofimov@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. I. Trofimov. A graph with a locally projective and transitive on vertices group of automorphisms Aut(Fi_{22}) which has a nontrivial stabilizer of a ball of radius 2. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 274–278 .